**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**

**высшего образования**

**«Московский государственный технический университет**

**имени Н.Э. Баумана**

**(национальный исследовательский университет)»**

**(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**



Численные методы линейной алгебры

Студент: Лю Кай

Группа：СМ1И-75б

Преподаватель: Чередниченко А.В.

Вариант 3

Москва

2024

Домашнее задание  
по курсу "Численные методы линейной алгебры"

СМ1 (бакалавры)  
Осень 2024

Дана система линейных уравнений (матрица А и вектор правой части **b**). Численно решить исходную и возмущенную систему следующими методами:

1. Методом Гаусса;
2. QR-разложением матрицы А;
3. Итерационным методом Гаусса-Зейделя.

Для получения возмущенной системы необходимо изменить элементы A(4,1) и A(1,4) в матрице A на 0,01 (в любую сторону). Сравнить полученные **решения.** **Показать, что все найденные решения верны. Объяснить полученные результаты.** Все вычисления проводить на числах с плавающей запятой типа double.

Для исходной и возмущенной матриц найти наибольшее и наименьшее собственные числа и соответствующие им собственные векторы. **Показать, что все найденные решения верны. Объяснить полученные результаты.**

Все, что успею рассказать — реализовать, что не успею рассказать — не делать.

Условия даны в формате MATLAB. Даны матрица системы и вектор правой части. Выполнять домашнее можно в любой системе (MATLAB, Wolfram Mathematica, Maple, SciLab, Maxima, Exel итд) (кроме Маткада) или писать свои программы на любом языке программирования.

При использовании систем компьютерной алгебры методы можно реализовывать и в алгоритмическом поэлементном виде, и в матричном виде. В любом случае не использовать «ручные» вычисления, а реализовать алгоритм. Нельзя использовать встроенные функции (например lu, qr, inv итд).

Титульный лист обязателен. В начале должно быть приведено это условие и конкретные матрицы, соответствующие варианту. В конце обязательно наличие выводов по проделанной работе. Страницы должны быть пронумерованы. Заголовки не должны быть и сами висячими строками, и после них не должно быть висячих строк.

**! Сдача работ с кодом, текстом, выводами и другими одинаковыми элементами, представленными кем-то ранее, рассматривается как полное неуважение к Университету!**

% Вариант 03

A=[ 2.0000 1.1100 0.6667 0.5000 0.4000 ;

1.1100 0.6667 0.5000 0.4000 0.3333 ;

0.6667 0.5000 0.4000 0.3333 0.2857 ;

0.5000 0.4000 0.3333 0.2857 0.2500 ;

0.4000 0.3333 0.2857 0.2500 0.2222 ]

b=[ 3.1167 2.0333 1.5429 1.2512 1.0552 ]

**Решение**

1. **Методом Гаусса:**

**3-ие элеменнарные преобразования:**

A→прямой преобразование→U→обратное преобразование→D→3-ое преобразование→I

**Для невозмущенной системы:**

Реализация кода Matlab：

%% Метод Гаусса

AB=[A b] %% Матрица расширения

n = length(b) %% Размерность матрицы

for j =1:n-1 %% прямой преобразование U

for i =j+1:n

k = AB(i,j)/AB(j,j)

AB(i,:)=AB(i,:)-k\*AB(j,:)

end

end

AB

for y =1:n-1 %% обратное преобразование D

z = n-y+1

for x=1:n-y

k = AB(x,z)/AB(z,z)

AB(x,:)=AB(x,:)-k\*AB(z,:)

end

end

AB

for l=1:n %% 3-ое преобразование I

AB(l,:) = AB(l,:)/AB(l,l)

End

Результат:







**Показать, что все найденные решения верны.**

x = AB(:,6)

q = A\*x-b

delta = norm(q)

В результате получаем вектор:



Для проверки решения найдем невязку:





Получаем невязку равную , что значит СЛАУ была решена верна с погрешностью в 

**Для возмущенной системы:**

A\_disturbed = A

A\_disturbed(4, 1) = A(4, 1) + 0.01

A\_disturbed(1, 4) = A(1, 4) + 0.01

Ab=[A\_disturbed b] %% Матрица расширения

n = length(b) %% Размерность матрицы

for j =1:n-1 %% прямой преобразование U

for i =j+1:n

k = Ab(i,j)/Ab(j,j)

Ab(i,:)=Ab(i,:)-k\*Ab(j,:)

end

end

AB

for y =1:n-1 %% обратное преобразование D

z = n-y+1

for x=1:n-y

k = Ab(x,z)/Ab(z,z)

Ab(x,:)=Ab(x,:)-k\*Ab(z,:)

end

end

AB

for l=1:n %% 3-ое преобразование I

Ab(l,:) = Ab(l,:)/Ab(l,l)

End



x\_disturbed = Ab(:,6)

q\_disturbed = A\_disturbed\*x\_disturbed-b

delta\_disturbed = norm(q\_disturbed)

В результате получаем вектор:



Для проверки решения найдем невязку:





Получаем невязку равную , что значит СЛАУ была решена верна с погрешностью в 

**Проверяем решение невозмущенного и возмущенного:**

delta\_relative = abs(delta\_disturbed-delta)/abs(delta)

Относительная погрешность решения:



В резултате получим, что решение оказалось **полностью искаженным** при возмущении системы

1. **Для исходной и возмущенной матриц найти наибольшее и наименьшее собственные числа и соответствующие им собственные векторы.**

%% наибольшее и наименьшее собственные числа

eig(A)

max(eig(A))

min(eig(A))

eig(A\_disturbed)

max(eig(A\_disturbed))

min(eig(A\_disturbed))

%% собственные векторы

[L,A\_eigenvector] = eig(A)

[V,A\_disturbed\_eigenvector] = eig(A\_disturbed)





|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | наибольшее | наименьшее | Cond（A） |
| исходной | 3.2106 | -0.0329 | 97.5866 |
| возмущенной | 3.2144 | -0.0318 | 101.0818 |

[V,D] = eig(A)

[V\_disturbed,D\_disturbed] = eig(A\_disturbed)

V

V\_disturbed





1. **QR-разложение (Gram-Schmidt process)**

clear

clc

%% Исходные данные

% матрица А

A=[ 2.0000 1.1100 0.6667 0.5000 0.4000 ;

1.1100 0.6667 0.5000 0.4000 0.3333 ;

0.6667 0.5000 0.4000 0.3333 0.2857 ;

0.5000 0.4000 0.3333 0.2857 0.2500 ;

0.4000 0.3333 0.2857 0.2500 0.2222 ]

% вектор правой части b

b=[ 3.1167

2.0333

1.5429

1.2512

1.0552 ]

% Векторы-столбцы матрицы A Инициализация

A1 = A(:,1)

A2 = A(:,2)

A3 = A(:,3)

A4 = A(:,4)

A5 = A(:,5)

% Проекция и вычитание

Q1 = A1

C1 = sum(A2.\*Q1)/sum(Q1.\*Q1)

Q2 = A2-C1\*Q1

C1 = sum(A3.\*Q1)/sum(Q1.\*Q1)

C2 = sum(A3.\*Q2)/sum(Q2.\*Q2)

Q3 = A3-C1\*Q1-C2\*Q2

C1 = sum(A4.\*Q1)/sum(Q1.\*Q1)

C2 = sum(A4.\*Q2)/sum(Q2.\*Q2)

C3 = sum(A4.\*Q3)/sum(Q3.\*Q3)

Q4 = A4-C1\*Q1-C2\*Q2-C3\*Q3

C1 = sum(A5.\*Q1)/sum(Q1.\*Q1)

C2 = sum(A5.\*Q2)/sum(Q2.\*Q2)

C3 = sum(A5.\*Q3)/sum(Q3.\*Q3)

C4 = sum(A5.\*Q4)/sum(Q4.\*Q4)

Q5 = A5-C1\*Q1-C2\*Q2-C3\*Q3-C4\*Q4

% Q матрицa Нормализация

Q(:,1) = Q1/norm(Q1)

Q(:,2) = Q2/norm(Q2)

Q(:,3) = Q3/norm(Q3)

Q(:,4) = Q4/norm(Q4)

Q(:,5) = Q5/norm(Q5)

R = Q'\*A

y = Q'\*b

x = R\y

A\*x-b

delta = norm(A\*x-b)

Получил:

Q =

0.8107 -0.4265 -0.3955 0.0670 -0.0027

0.4499 0.0277 0.8925 0.0003 -0.0131

0.2702 0.5364 -0.1478 -0.7142 0.3277

0.2027 0.5328 -0.1305 0.1370 -0.7995

0.1621 0.4957 -0.0900 0.6831 0.5032

R =

2.4671 1.4700 0.9874 0.7738 0.6381

-0.0000 0.1916 0.2632 0.2527 0.2352

0.0000 0.0000 0.0543 0.0502 0.0445

0.0000 0.0000 -0.0000 0.0055 0.0089

-0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000 0.0001

В результате получаем вектор:





Для проверки решения найдем невязку:





Получаем невязку равную , что значит СЛАУ была решена верна с погрешностью в 

Для возмущенной системой:

% Для возмущенной системой:

A\_disturbed = A

A\_disturbed(4, 1) = A(4, 1) + 0.01

A\_disturbed(1, 4) = A(1, 4) + 0.01

A1 = A\_disturbed(:,1)

A2 = A\_disturbed(:,2)

A3 = A\_disturbed(:,3)

A4 = A\_disturbed(:,4)

A5 = A\_disturbed(:,5)

% Проекция и вычитание

Q1 = A1

C1 = sum(A2.\*Q1)/sum(Q1.\*Q1)

Q2 = A2-C1\*Q1

C1 = sum(A3.\*Q1)/sum(Q1.\*Q1)

C2 = sum(A3.\*Q2)/sum(Q2.\*Q2)

Q3 = A3-C1\*Q1-C2\*Q2

C1 = sum(A4.\*Q1)/sum(Q1.\*Q1)

C2 = sum(A4.\*Q2)/sum(Q2.\*Q2)

C3 = sum(A4.\*Q3)/sum(Q3.\*Q3)

Q4 = A4-C1\*Q1-C2\*Q2-C3\*Q3

C1 = sum(A5.\*Q1)/sum(Q1.\*Q1)

C2 = sum(A5.\*Q2)/sum(Q2.\*Q2)

C3 = sum(A5.\*Q3)/sum(Q3.\*Q3)

C4 = sum(A5.\*Q4)/sum(Q4.\*Q4)

Q5 = A5-C1\*Q1-C2\*Q2-C3\*Q3-C4\*Q4

% Q матрицa Нормализация

Q(:,1) = Q1/norm(Q1)

Q(:,2) = Q2/norm(Q2)

Q(:,3) = Q3/norm(Q3)

Q(:,4) = Q4/norm(Q4)

Q(:,5) = Q5/norm(Q5)

R = Q'\*A

y = Q'\*b

x = R\y

A\*x-b

delta = norm(A\*x-b)

Получил:

Q =

0.8100 -0.4300 -0.3925 0.0702 -0.0050

0.4495 0.0301 0.8916 -0.0152 0.0424

0.2700 0.5464 -0.1772 -0.7440 0.2090

0.2065 0.5109 -0.0794 0.2462 -0.7933

0.1620 0.5046 -0.1154 0.6170 0.5702

R =

2.4691 1.4704 0.9879 0.7824 0.6386

-0.0000 0.1885 0.2613 0.2469 0.2340

0.0000 0.0000 0.0539 0.0459 0.0441

0.0000 0.0000 -0.0000 0.0064 0.0091

-0.0000 -0.0000 -0.0000 0.0000 0.0002

В результате получаем вектор:





Для проверки решения найдем невязку:





Получаем невязку равную , что значит СЛАУ была решена верна с погрешностью в 

Относительная погрешность решения:



В резултате получим, что решение оказалось полностью искаженным при возмущении системы